Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Soluzioni del tutorato di AC310

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. Pierpaolo Esposito
Tutori: Dario Giannini e Giulia Salustri

Tutorato 1
9 Ottobre 2012

1. Determinare argomento, modulo e rappresentazione trigonometrica ed esponenziale dei seguenti numeri complessi:

a) $3-2i$ b) $-\sqrt{3}+3i$

c) $\dfrac{i-6}{2+7i}$ d) $\dfrac{7+i}{(2+5i)^3}$

e) $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ f) $\dfrac{4i}{\sqrt{3}+i}$

g) $(4+6i)^{-1}$ h) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2-\sqrt{3}\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$

i) $sin\alpha - icos\alpha$

SOLUZIONE:
Sia $z\in\mathbb{C}$ allora posso scrivere z come coppia di due numeri reali $z=x+iy$, dove i unitá immaginaria é data dalla relazione $i^2=-1$. z puó inoltre essere scritto utilizzando i forma esponenziale:

$$z=\rho e^{i\theta}$$

dove: $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ si dice norma di z e corrisponde alla distanza del punto dall'origine;
$\theta=\begin{cases} arctg\left(\frac{y}{x}\right) & se\ x>0 \\ arctg\left(\frac{y}{x}\right)+\pi & se\ x<0\end{cases}$
si dice argomento di z e corrisponde alla misura dell'angolo individuato da z sulla circonferenza di raggio ρ.
A questo punto sfruttando l'identitá di Eulero $e^{i\theta}=cos(\theta)+isin(\theta)$ posso scrivere z nella sua forma trigonometrica, i.e. $z=\rho(cos(\theta)+isin(\theta))$.
Notare che $|e^{i\theta}|=1$.
a) $z=3-2i$. $|z|=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$ e $\theta=arg(z)=arctg(-\frac{2}{3})\Rightarrow$
$z=\sqrt{13}e^{iarctg(-frac23)}$ e $z=\sqrt{13}(cos(\theta)+isin(\theta))$.
b)$|z|=2\sqrt{3}$ e $arg(z)=arctg(-\frac{3}{sqrt3})+\pi=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2}{3}\pi\Rightarrow$
$z=2\sqrt{3}e^{i\frac{2}{3}\pi}$ e $z=2\sqrt{3}(cos(\frac{2}{3}\pi)+isin(\frac{2}{3}\pi))$.
c) Prima di calcolare la norma é necessario moltiplicare sia il numeratore sia il denominatore per il coniugato di quest'ultimo; in questo modo al denominatore si otterrá un numero reale.
$\dfrac{i-6}{2+7i}\dfrac{2-7i}{2-7i}=\dfrac{44i-5}{53}\Rightarrow$

$|z| = \sqrt{\dfrac{37}{53}}$ e $arg(z) = arctg(-\frac{44}{5}\pi) + \pi$
d)$|z| = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{29^3}}$ e $arg(z) = arctg(\frac{1}{7} - 3arctg\frac{5}{2})$.
e)$|z| = 2$ e $arg(z) = \frac{3}{4}\pi$.
f)$|z| = 2$ e $arg(z) = \frac{\pi}{3}$.
g)$|z| = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ e $arg(z) = arctg(-\frac{3}{2})$.
h)$|z| = 2$ e $arg(z) = \frac{4}{3}\pi$.
i)$|z| = 1$ e $arg(z) = \frac{\pi}{2} - \alpha$, basta sfruttare gli archi associati ($cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = sin(\alpha)$ e $sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = -cos(\alpha)$).

2. Descrivere i seguenti insiemi e disegnarli nel piano di Gauss:

   a) $|z + i| = 3$

   b) $Im(z^2) > 3$

   c) $z + 4\overline{z} - 3 = 0$

   d) $|z - 2| + |z + 2| = 8$

   e) $Im(\overline{z^2 - \overline{z}}) = 2 - Im(z)$

   SOLUZIONE:
   Uno dei metodi per risolvere questo tipo di esercizi é scriversi $z = x + iy$ e rappresentare l'insieme sul piano di Gauss mettendo la y in funzione di x.
   a) É la circonferenza di centro $-i$ e raggio 3. Infatti $|z+i| = |x+i(y+1)| = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \Rightarrow$
   $x^2 + (y+1)^2 = 9$, i.e. la circonferenza di centro $(0, -1)$ e raggio 3.
   b) $xy > \frac{3}{2}$.
   c) $x = \frac{3}{5}$ e $y = 0$.
   d) In questo caso bisogna sfruttare la definizione di ellisse come luogo geometrico dei punti la cui somma delle distanze da due punti fissi, detti fuochi, é costante. L'insieme descritto é dunque l'ellisse con fuochi 2 e -2 e semiasse reale di lunghezza 4.
   e)$y = \frac{1}{1-x}$.

3. Sia data la funzione $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da $f(z) = i(2\overline{z} - |z + 2i|^2) + 5$. Trovare l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ t.c. $Im(f(z)) = 0$ e $Re(f(z)) \leq 0$ e disegnarlo nel piano di Gauss.

   SOLUZIONE: Nel testo del tutorato c'é un errore; la parentesi vá messa dopo la potenza al quadrato.
   Si svolge come l'esercizio precedente e si trovano le seguenti soluzioni:
   $\begin{cases} y \leq -\frac{5}{2} \\ (x+1)^2 + (y+2)^2 = 1 \end{cases}$.
   Ossia la parte della circonferenza con centro $-1 - 2i$ di raggio 1 che ha

parte immaginaria $\leq \frac{5}{2}$.

4. É vero che, se $\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = 0$, allora $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$? E se al posto di 0 c'é 1?
(Nel caso la risposta sia negativa, fornire un contresempio).

SOLUZIONE: Dalla definizione di limite deriva che:
$\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n\| = 0 \Rightarrow \forall\epsilon > 0\ \exists M > 0$ t.c. $\forall\ n > M \Rightarrow |\|u_n\| - 0| < \epsilon \Rightarrow$
$\forall\epsilon > 0\ \exists M > 0$ t.c. $\forall n > M\ \|u_n - 0\| < \epsilon \Rightarrow$
$\forall\epsilon > 0\ \exists M > 0$ t.c. $\forall m > M\ |u_n| < \epsilon \Rightarrow \forall\ \epsilon > 0\ \exists M > 0$ t.c. $\forall m > M\ |u_n - 0| < \epsilon \Rightarrow$
$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$
Per il secondo punto basta mostrare un controesempio per far vedere che non vale. In questo caso si considera la successione costante $u_n \equiv -1\ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

5. Calcolare le seguenti potenze:

a) i^{41}

b) $\dfrac{1}{i^{15}}$

c) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}-i} + \dfrac{1}{i}\right)^k$,con $k = 2, 6$

d) $\left(\dfrac{1+i}{2-2i}\right)^k$, con $k = 2, 6$

e) $i^{\frac{1}{i}}$

f) 1^i

g) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$

SOLUZIONE:
Per le potenze n-esime di i é utile sfruttare il fatto che:
$i^n = \begin{cases} 1 \ \ se\ n \equiv 0\ (mod\ 4) \\ i \ \ se\ n \equiv 1\ (mod\ 4) \\ -1 \ \ se\ n \equiv 2\ (mod\ 4) \\ -i \ \ se\ n \equiv 3\ (mod\ 4) \end{cases}$
Nel nostro caso $i^{41} = i$ e $i^{-15} = i$.
In generale per le potenze complesse si utilizza la formula di De Moivre $z^n = \rho^n e^{in\theta}$ oppure ci si scrive:

$$z^b = e^{Log(z^b)} = e^{bLog(z)}$$

dove per Log con la l maiuscola si intende il logaritmo complesso.
Inoltre si ha che $Log(z) = log|z| + i(arg(z) + 2k\pi)$.
c)$z = \left(\frac{2}{\sqrt{3}-i} + \frac{1}{i}\right) = \frac{\sqrt{3}-i}{2} = e^{-i\frac{\pi}{6}} \Rightarrow$

se $k=2$ si ha che $z=e^{-i\frac{\pi}{6}}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$;
se $k=6$ si ha che $z=e^{-i\pi}=-1$.
d)$z=\left(\dfrac{1+i}{2-2i}\right)=\dfrac{i}{2}\Rightarrow$
se $k=2$ si ha che $z=-\frac{1}{4}$;
se $k=6$ si ha che $z=-\frac{1}{64}$.
e)$i^{\frac{1}{i}}=i^{-i}=e^{-iLog(i)}=e^{-i(log|i|+i(\frac{\pi}{2}+2k\pi))}=e^{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$
f)$1^{i}=e^{i(2k\pi i)}=e^{-2k\pi}$
g)$\left(1+i\sqrt{2}\right)^{2}i=e^{-\frac{\pi}{2}+4k\pi}$.

6. Calcolare i seguenti logaritmi:

a) $Log(i)$ b)$Log(-i)$

c) $Log(3-2i)$ d)$Log(-1-i)$

SOLUZIONE:
a)$Log(i)=i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)$
b)$Log(-i)=i(\frac{3}{2}\pi+2k\pi)$
c)$Log(3-2i)=\frac{1}{2}log|13|+i(arctg(\frac{2}{3})+2k\pi)$
d)$Log(-1-i)=log(2)+i(\frac{5}{4}\pi+2k\pi)$

7. Calcolare le seguenti radici:

a) $(1-i\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}$

b) $(-2)^{\frac{1}{4}}$

c) $\left(\dfrac{-2}{1-i\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{4}}$

d) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{\frac{1}{4}}$

SOLUZIONE:
Per calcolare le radici n-esime si sfrutta la formula di De Moivre illustrata precedentemente considerando l'angolo con la sua periodicitá, i.e. $z=e^{x+iy}=e^{x+i(y+2k\pi)}$ (in quanto $e^{2k\pi i}=1$ se $k\in\mathbb{Z}$).

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}e^{i(\frac{\theta+2k\pi}{n})}$$

a) $(1-i\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}e^{i(\frac{5}{6}\pi+k\pi)}$, con $k=0,1$
b) $(-2)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2}ei(\frac{\pi}{4+k\frac{\pi}{2}})$, con $k=0,1,2,3$
c) $(\frac{-2}{1-i\sqrt{3}})^{\frac{1}{4}}=e^{i(\frac{\pi}{3})+k\frac{\pi}{2}}$, con $k=0,1,2,3$
d) $(\frac{1+i}{1-i})^{\frac{1}{4}}=i^{\frac{1}{4}}=e^{i(\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2})}$, con $k=0,1,2,3$

8. Risolvere le seguenti equazioni in $\mathbb{C}$.
a) $z^2+2z+1+i=0$

b)$z^5 + (1+i)z = 0$

c) $(z-2i)^4 = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$

d)$z^2 - \overline{z}^2 = 4i$

e) $z^6 - z^3 + 1 = 0$

f)$z^2 + |z|^2 = \sqrt{2}z|z|$

SOLUZIONE:
a) Risolvo con la formula di risoluzione dei polinomi di secondo grado. Trovo due soluzioni(nn devono essere necessariamente coniugate in quanto i coefficienti si trovano in $\mathbb{C}$). Le soluzioni sono:
$z_0 = -\frac{2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{4}$ e $z_1 = -\frac{2-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{4}$.
b)$z(z^4 + (1+i)) = 0$ Le soluzioni sono:
$z = 0$ e $z = (-1-i)^{\frac{1}{4}}$ che ha soluzioni $z_k = \sqrt[8]{2}e^{i(\frac{5}{16}\pi + k\frac{\pi}{2})}$, con $k = 0,1,2,3$
c)$z - 2i = \left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = e^{i(\frac{\pi}{24}+k\frac{\pi}{2})}$, con $k = 0,1,2,3$. Allora $z = 2i + e^{i(\frac{\pi}{24}+k\frac{\pi}{2})}$, con $k = 0,1,2,3$.
d) In questo caso conviene scomporre $z = x + iy$ e poi eguagliare parti reali e immaginarie. Si ha che:
$x^2 - y^2 + 2ixy - (x^2 + y^2 - 2ixy) = 4i \;\Rightarrow\; 4ixy = 4i$, i.e. l'insieme delle soluzioni si puó scrivere come:
$S = \{z = x + iy | xy = 1\}$.
e)In questo caso conviene fare la sostituzione $z^3 = t$, l'equazione diventa: $t^2 - t + 1$ e ha soluzione $t = e^{1(\frac{\pi}{3}+k\pi)}$, con $k = 0,1$. A questo punto devo solo esprimere le soluzioni in funzione di z:
$z = (e^{1(\frac{\pi}{3}+k\pi)})^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$
$z = (e^{1(\frac{\pi}{9}+k\frac{\pi}{3})})$, con $k = 0,1,2,3,4,5$. f)Qui conviene prima dividere entrambi i membri dell'equazione per $|z|^2 \Rightarrow$
$\left(\dfrac{z}{|z|}\right)^2 + 1 = \sqrt{2}\dfrac{z}{|z|}$ e poi applicare la seguente sostituzione $t = \frac{z}{|z|}$. La mia equazione diventa $t^2 - \sqrt{2}t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{z}{|z|} = e^{\pm i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow$
L'insieme delle soluzioni é $S = \left\{z \in \mathbb{C} | z = \rho e^{\pm i\frac{\pi}{4}}, \rho > 0\right\}$.

9. Trovare un polinomio $P(z)$ a coefficienti reali di grado 5, avente $z = 3$ come radice semplice, $z = 2 - 3i$ come radice di molteplicitá 2, e tale che $P(0) = 1$.

SOLUZIONE:
Poiché il polinomio é per ipotesi a coefficienti reali se é presente una radice complessa deve essere presente anche la sua coniugata(con relativa molteplicitá). Il polinomio sará quindi del tipo:

$$P(z) = k(z-3)(z-2+3i)^2(z-2-3i)^2$$

Mi rimane quindi solo da determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo tale che $P(0) = 1 \Rightarrow$ $P(0) = k(-3)[(-2+3i)(-2-3i)]^2 = -3k[13]^2 = -507k \Rightarrow k = -\frac{1}{507}$.

10. Sia $z = re^{i\theta}$ un numero complesso non nullo, e siano $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ le n radici n-esime di z. Dimostrare che se $n \geq 2$ si ha che $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0$.

    SOLUZIONE:
    Sia α una radice n-esima di z e sia ρ la norma di z, allora α sará della forma $\alpha = \sqrt[n]{\rho}e^{i(\frac{\theta+2k\pi}{n})}$, con $k \in [0, n-1]$(sono tutte e sole le radici n-esime)$\Rightarrow$
    $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k = \sqrt[n]{\rho}\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(\frac{\theta+2k\pi}{n})} = \sqrt[n]{\rho}e^{i(\frac{\theta}{n})}\sum_{k=0}^{n-1} e^{(\frac{2k\pi i}{n})} = \sqrt[n]{\rho}e^{i(\frac{\theta}{n})}\sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{(\frac{2\pi i}{n})}\right)^k \Rightarrow$
    Tale espressione é uguale a zero $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{(\frac{2\pi i}{n})}\right)^k = 0$.
    Ma questo é vero; infatti basta utilizzare l'identitá $(1-x)(1+x+\cdots+x^n) = (1-x^{n+1})$ per scriversi la sommatoria come:

    $$\frac{1 - e^{\frac{2\pi i n}{n}}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}} = 0$$

    In quanto $e^{2\pi i} = 1$.